

可能性灰色預測及模糊迴歸於台灣股市加權指數之 預測與分析

陳筱琪、徐作聖、曾國雄
交通大學科技管理研究所

胡宜中
中原大學企業管理學系

摘要

在證券市場預測的應用上，以往關於股價的趨勢預測研究，大多是利用時間數列的分析方法，如 ARIMA 當作預測的主要方法。但是，由於證券市場充斥著許多不明確性，且所獲得的資料有曖昧性之可能，因此本文提供新發展獨特的可能性灰色預測模型與模糊迴歸兩種預測方法，作為投資者在進行預測時的輔助決策。本研究除針對新創的可能性灰預測做說明外，亦希望對於因果分析法與時間數列法分析其中的優劣，藉以為投資者找出一個在目前狀況下的最佳投資預測模型。本研究之主要目的除比較分析可能性灰色預測與模糊迴歸兩種預測方法之特色外，尚特別針對研究中所必須取決的樣本數進行相關探討，並且以台灣股市加權指數作為本研究之實例驗證。在實例驗證所顯示的結果中，發現可能性灰色預測與模糊迴歸兩種方法在預測能力上均屬佳，只是在運用的範圍上略有不同；至於在樣本數上，依本例結果發現，十個樣本數較能兼具六個與二十個樣本之優點，達到有效又即時之最佳預測結果。

關鍵字：灰色預測、可能性、模糊迴歸、GM(1,1)、股市加權指數

Forecasting and Analyzing the Stock-Market Price in Taiwan using Possibility Grey Forecasting and Fuzzy Regression

Hsiao-Chi Chen、Joseph Z. Shyu、Gwo-Hshing Tzeng
Management of Technology, National Chiao Tung University

Yi-Chung Hu
Department of Business Administration, Chung Yuan Christian University

Abstract

Causality and time series model are the most effective methods adopted in forecasting practices. Time series model, such as ARIMA, is applied for most researchers in stock prices prediction. However, the financial environment and information around the stock market are mostly vague. It is therefore, this paper is to present two forecasting methods: Possibility grey forecasting and fuzzy regression. These two models help investors make decisions in stock market. For promoting the performance, the differences between these models and the scenarios of implementing are also analyzed in this paper. These will assist investors to formulate their investing strategy while facing various conditions. The main purpose of this paper is to analyze and compare the different characteristics between possibility grey forecasting model and fuzzy regression, especially about the numbers of samples in possibility grey forecasting model. The results have showed that the possibility grey forecasting model and fuzzy regression's ability of forecasting are proper, but in different application. In possibility grey forecasting model, the ten samples outperform the six and twenty ones. Six and twenty samples can play good roles in forecasting, but ten samples have better performance.

Keywords: gray forecasting, possibility, fuzzy regression, GM (1,1), stock-market price

壹、前言

自 1997 年國際金融風暴過後，台灣股價加權指數便呈現不斷上下震盪的波動，而且在台灣股市中許多構面因素都一直對於台灣股價加權指數造成影響，因此使得投資者在預測上有一定的困難度。在過去，由於台灣股價加權指數與國際股票市場有相當的關聯性，預測工作較容易進行，但是自國際金融風暴過後，台灣股市便與國際股市形成脫軌的現象，台股加權指數的變動自成一個體系，因此吾人希望藉由觀察過去股價加權指數的歷史資料，分析變動軌跡現象所呈現的特性及訊號，而獲知該現象未來的變化狀況。

以往關於股價趨勢的預測研究，大多是利用時間數列的分析方法，如 ARIMA 當作預測的主要方法。但是有兩大困難無法克服：需蒐集大量歷史樣本資料，及需針對研究樣本之母體分配作嚴格假設。而由於證券市場充斥著許多不明確性，且所獲得的資料有曖昧性之可能，因此為解決無規律波動所造成預測的困難，及迴避股價加權指數樣本所具備的曖昧性，投資者必須仰賴有效的預測模型來輔助決策。本研究期望提供金融市場適當的股價指數預測工具，因此對於主要用來分析單一公司股價股價波動行為的技術預測方法 (Modis, 1999) 並無著墨。

證券市場常用的預測方法可分為兩種，一類為因果分析法，一類為時間數列法。曹勝雄等 (1996) 人利用傳統計量迴歸、模糊迴歸、GMDH 與類神經網路四種因果分析法，對於國人赴港旅客需求的預測做實證研究。對於時間數列分析方法與股價預測，學者應用模糊理論與灰色理論已有許多的研究，如劉定焜、施能仁 (1998) 應用灰色理論於台灣發行量加權股價指數之預測，並將結果引入台灣股價指數期貨市場，進行模擬避險操作；或如李天行等 (2001) 人將股價指數可能存在期貨領先現貨的內涵現象以新加坡交易所日經 225 指數期貨為例作實證研究，並利用類神經網路建構預測模型針對開盤現貨指數進行預測。但上述之研究，皆非對於因果分析與時間序列方法的方法論及應用性進行整理分析及比較。Peter Verhoeven, Berndt Pilgram, Michael McAleer 和 Alistair Mees (2002) 研究根據非線性模型發展的靈活預測方法，並以預測 S & P500 的股價指數作為研究樣本，結果顯示根據標準變量分析非線性非參數的模型預測股價指數的績效相較於 GJR-GARCH (1,1) - t 模型更適合靈活運用在多樣動態的模式中。

本研究希望針對因果分析法與時間數列法分析其中的優劣，藉以為投資者找出一個在目前狀況之下的最佳投資預測模型。因此以台灣股價加權指數預測為例，採模糊迴歸模型，及本研究經由修正與改善相關研究而新發展出的獨特可能性灰預測模型兩種方法進行預測並加以分析，以提供投資者在選擇預測方法之參考。

可能性灰預測模型 (Possibility Grey Forecasting Model, PGM) 在本研究中，是將過去相關研究加以修正改善而發展出的獨特新創模型。主要是將鄧聚龍與郭洪在 1996 年提出的灰色預測加以修正，灰預測是採用灰色模型 (Grey Model, GM)，對系統的發展變化進行預測，以找出某一數列數據間的關係；在 1998 年曾國雄與江勁毅利用模糊理論為基礎之「可能性迴歸」(Tanaka, 1987; Tanaka and Watada, 1988; Tanaka et al., 1989) 的概念於灰預測模型 GM (1,N)，產生上與下包絡曲線的修正，解決灰預測以相當少資料就可

以建立模式的問題。可解決與處理實際面上所面臨之樣本資料不足，且為曖昧性的問題。

模糊迴歸 (Fuzzy Regression) 是田中 (Tanaka)、上島 (Uejima) 及淺居 (Asai) 於 1982 年首先提出 (Tanaka, et al., 1982)。傳統線性迴歸的輸入及輸出均為明確的數值，因此在衡量不明確的系統時，便會產生模型誤差，並主張誤差的來源是在於觀測值，以最小平方方法求出。而為符合問題之不確定性及避免模型誤差，田中等人提出模糊迴歸模式來處理模糊環境的問題。

本研究之主要目的在比較分析可能性灰預測模型及模糊迴歸兩種預測方法之特色，並特別針對研究所必須取決的樣本數作探討，由於 GM (1,N) 所建構的基礎：是對於灰色量不是從找統計規律的角度通過大樣本量進行研究，而是用數據處理的方法，將雜亂無章的原始數列整理成規律較強的生成變數，以發現尋找其內在規律的方法。因此預測的資料數目不用太多即能預測，則是灰色預測的特色。但是在投資預測時，決策者仍是希望藉由可信的樣本數作明確及迅速的預測，因此本研究特針對灰色預測的樣本數問題，探討何謂適當的樣本數及較精確的預測方法。最後，本研究以台灣股市加權資金指數為例作實例驗證，結果在本研究中顯示，十個樣本數的情況下所表現的預測效果最佳。

本文結構共分為五節。第一節緒論，說明研究背景與動機，研究問題與目的以及研究步驟與研究架構。第二節文獻回顧，介紹過去有關於灰預測、可能性灰預測與模糊迴歸之構思與應用。第三節模式構建，提出可能性灰預測與模糊迴歸之研究方法的理論基礎。第四節實證與其結果討論，利用學習演算法求出發展係數與控制變數以及寬度，並分析其中代表意義，最後則是結論與建議。

貳、可能性灰預測模型與模糊迴歸之構思與應用

「灰色系統理論 (Grey System Theory)」是華中理工大學鄧聚龍教授於 1982 年所提出 (Deng, 1982)，發展至今，已跨出初始時的「控制領域」，而應用到社會及自然科學系統的各層面。因此，灰預測的議題上，目前有一些文獻是將其與控制器 (Controller) 做結合 (Huang and Huang, 1997)，以有效預測控制器的行為。

灰預測強調以相當少的資料就可以建立模式；而這也是灰預測一直飽受攻擊的地方，在累加後係數之校估上使用以機率為基礎的傳統統計學之迴歸分析方法 (本文稱之為傳統型)。但是灰預測一定有其適用之領域，而且加以修正後，更可以擴大其應用領域。例如可對股價灰預測模型之上與下包絡曲線進行修正，以使預測區間更為精準。

吳坤暉與曾國雄 (2002) 以 1999 年 12 月到 2000 年 5 月股市的月平均收盤價資料建立模型，作最近半年歷史性資料的預測寬度及其建立上下包絡線以說明可能性灰預測 PGM(1,1) 模型之應用。結果資料均落在上下包絡線之間，且區間寬度小，可證明可能性灰預測之適用性與合理性；本研究的模式主要是依據此再做延伸性的改善及修正。陳榮方與楊敏里 (1997) 利用南亞塑膠公司 1992 至 1996 之財務報表資料以灰預測傳統模型與迴歸預測法對短期財務資料進行預測與比較。實證結果發現，灰預測模型所得到之預測值平均殘差遠小於迴歸預測法之預測值平均殘差，亦即灰預測有較佳之預測結果。曾

芳美等(2001)更以混合其他方法的灰色模型預測季節性的時間數列，並以台灣機械產業總產值資料計算，分析出灰色模型不適合預測具有季節性特質的時間數列。

模糊迴歸方法是根據資料的散佈求得係數的可能性分布，估計值與觀測值間的殘差並非由於量測誤差所致，而是由於模型中參數的不確定性所引起，亦即模型的參數是一模糊數。基於此觀念，模糊迴歸在計算上是在某個水準下，實際觀測值(模糊數)的截集能被估算值(模糊數)的截集所完全包含，因此模式之輸出為包含觀測值之某一區間，亦即模糊迴歸為一種區間預測。在邵順利(1994)實證研究中，採集2年的台灣證券交易所之上市公司證券交易資料，取樣範圍為140家上市公司之第一、第二類普通股。以模糊中的「單一指數模型」應用在證券的系統風險 β ，由於「風險」的概念上應該是涵蓋某種程度的模糊，再加上許多實證均指出 β 具有不穩定性(instability)，故以此研究提供後續的研究者在模糊模型的選擇上有所參考。Toly Chen 和 Mao-Jiun J. Wang (1999)探討運用模糊概念的預測模型，主要是研究 FI (Fuzzyinterpolation) 與模糊線性迴歸，結果發現模糊概念適合在半導體產業這類的高度變動環境下預測產品價格與銷售。Ping-Teng Chang (1997)運用模糊預測的技術在季節性的時間序列資料上，以模糊迴歸方法找出時間序列的模糊趨勢，以進行分析與預測。

曹勝雄等(1996)研究以國人赴港旅客需求人數之預測為例，將傳統計量迴歸、模糊線性迴歸、GMDH及類神經網路之四種預測方法進行實證比較分析。實證結果發現，模糊迴歸基本上是屬於一種區間預測模式，而此模式較易受到極端值的影響而使得預測區間變大，由於是區間的預測，因此無法與其他三種模式同時比較；唯對於區間預測模式之方法論有更深入的研究，並了解區間模式在預測上的實用情況，因此本文僅就可能性灰色預測及模糊迴歸在預測上做比較分析。

參、預測方法之理論基礎

在本節中，主要是針對本研究採用的方法工具所依據的理論基礎，作大略的基礎闡述，使得後續研究者可對於本研究所使用新發展的可能性灰色預測模型及模糊迴歸有基本的認識，並且可以在此節中得到主要研究概念的依據。此節先分別介紹 GM(1,1)模型及可能性迴歸分析的觀念，再將此兩種方法是如何運用及發展出可能性灰色模型的概念簡略介紹，最後再對於另一研究工具--模糊迴歸的基本理論基礎稍作闡述。

一、GM(1,1)模型及可能性迴歸分析之基本觀念

由於可能性灰預測模型是由 GM(1,1)模型及可能性迴歸分析這兩種方法改進而來，因此在說明可能性灰色預測之理論之前，必須要具有灰色模型及可能性迴歸分析的基本觀念，故本節先簡略的解釋 GM(1,1)及可能性迴歸的基本觀念。

(一) GM(1,1)模型

本篇論文是時間數列預測方法之分析，故採用可能性灰預測 PGM(1,1)模型作為預測模型。其建構模型如下 (Deng, 1989)：

取得系統的數據來組成數列 $x^{(0)}$ 建立灰色模型，如在第 n 時刻之灰色建模原始數列

$x^{(0)}$ 為：

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \quad (1)$$

經數據擷取後，就需對未有規律性之原始數列 $x^{(0)}$ 進行一次累加生成 (Accumulated Generating Operation, AGO)，使成具有規律性之數列。經累加生成後的數列稱為「生成數列」。

一次累加生成數列則為 $x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$

$$x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^k x^{(0)}(m) \quad (2)$$

$$\text{則 } x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1), \text{ for } k \geq 2 \quad (3)$$

$$x^{(0)}(1) = x^{(1)}(1), \text{ for } k = 1 \quad (4)$$

而可能性灰色預測 PGM(1,1) 是一個被廣泛使用的預測模型，其灰色差分方程之原模型為：

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (5)$$

其中， a 為發展係數， b 為控制變數，且生成數列背景值 $z^{(1)}(k)$ 可以下式表示：

$$z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k) + (1 - \alpha)x^{(1)}(k-1) \quad , \text{ 一般 } \alpha \text{ 設為 } 0.5 \quad (6)$$

GM(1,1) 白化模型 (影子模型)

$$\frac{dx^{(1)}(k)}{dk} + ax^{(1)}(k) = b \quad (7)$$

由此，按一般常微分方程求解，可得離散化的

$$x^{(1)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (8)$$

$$x^{(0)}(k+1) = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) \quad (9)$$

$$x^{(0)}(k) = \left(1 - e^a \right) \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-a(k-1)} \quad (10)$$

$$\text{參數列為 } P = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

利用最小平方法 (傳統方法) 求解參數列可得 $P = (B^T B)^{-1} B^T y$

$$y = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)) & 1 \end{bmatrix}$$

解此微分方程式得

$$x^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (11)$$

再將 $x^{(1)}(k)$ 經過累減生成即可還原得到 $x^{(0)}(k)$ 。

由於灰色預測有累加後係數之校估的問題，且在使用上受到以機率($n \rightarrow \infty$)為基礎之嚴格假設所限制的迴歸預測方法，因此本研究將「可能性迴歸」的觀念應用於 GM(1,1) 灰微分模型，建構出可能性灰微分模型來處理與解決灰預測原先之瑕疵。

(二) 可能性迴歸分析

假設 N 維向量 x 為服從「指數型可能性分佈」(Tanaka and Lee, 1998)，則可表示成：

$$\Pi_A(x) = \exp\{-(x - a_c)^T \cdot D_b^{-1} \cdot (x - a_c)\} \quad (12)$$

其中， A 為可能性分佈之標記， a_c 為中心向量， D_b 稱為寬度矩陣 (Spread Matrix)，為一正向對稱之正定矩陣。 D_b 可以視為統計分析中之變異共變異矩陣。(12)式之參變數表示如下：

$$A = (a_c, D_b)_e \quad (13)$$

考慮如 $y = Tx$ 的線性轉換，若 x 為具有可能性分佈之變數，則 y 亦如(13)式呈指數型可能性分佈。 $y = Tx$ 之 x 以可能性分析 a (即模糊向量 a) 代替為輸入，則輸出為 N 維之可能性分析 y (模糊向量 y)，表示如下：

$$y = Ta \quad (14)$$

二、可能性灰色預測模型

可能性灰色預測模型的建立，主要是將可能性迴歸觀念於 GM(1,N) 之灰微分模型而建構出可能性灰微分模型，且若將 GM(1,N) 之灰微分模型中因子序列的係數 b 視為非唯一性、具不確定性時，將使得所建立之 GM(1,N) 模型為非唯一性，此種非唯一性對於預測模型而言，可提供更多之參考資料給決策者，使決策更具彈性 (曾國雄、江勁毅, 1998)。因此建構可能性灰色預測模型主要便是基於上述觀點將灰色預測模型及可能性迴歸分析兩種不同的模型相結合應用。模式之建立可分成兩階段，第一階段主要是以傳統 GM(1,1) 之模式為主，首先校估出灰微分方程之協調參數 b ，然後以此協調參數作為第二階段可能性分佈模型中的中心向量 b_c ；第二階段則是在某一決策者認定之可能性

水準程度下，找出可包含所有樣本點之協調參數 b 的寬度 D_b 。灰色可能性模式之構建程序如下：

階段 1：構建原始 GM(1,1) 模式

$$\frac{dx^{(1)}(k)}{dk} + ax^{(1)}(k) = b$$

將上式以離散近似模式表示之：

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (15)$$

其中， $\frac{dx_1^{(1)}}{dt} = x_1^{(0)}$ ，以 (7) 及 (8) 式進行求解，得到發展係數 a 及協調參數中心位置 b_c 。

階段 2：計算協調參數之寬度 D_b

令協調參數 b 服從指數型可能性分佈：

$$\Pi_B(b) = \exp\{-(b - b_c)^T \cdot D_b^{-1} \cdot (b - b_c)\},$$

B 為可能性分佈之標記，且 $Y_k = Bx_k$ ， b_c 為中心向量， D_b 為對稱之正定矩陣。

根據已知的資料 (Y, X) ，建立如下之規範模式：

$$\begin{aligned} \underset{D_b}{Min} \quad & J = \sum_k x_k^T D_b x_k \\ s.t \quad & x_k^T D_b x_k \geq (Y_k - x_k^T b_c)^2 / (-\ln h) \end{aligned} \quad (16)$$

且 $x_k^T D_b x_{k'} = 0$ ， $k' \neq k$ ，表示 $x_{k'}$ 與 x_k 互為獨立性。

J 為目標函數。

其中， h 表示資料之可能性程度，由決策者事先給定的，一般而言可令 $h = 0.5$ 進行求解。求解上式即可得到協調參數之寬度 D_b 。

經由上述步驟即可建立具可能性分佈 $Y_k = x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k)$ 之 GM (1,1) 模式。此

可能性分佈建立之後，則可以求出預測年在某一可能性程度下之

$Y_k = x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k)$ 的可能性區間，由於我們所關心的是主序列（即應變數），

因此必須再經過轉換還原之計算，其計算步驟如下：

$$\bar{x}^{(1)}(k) = \frac{2}{a} \{b_c x_k + [(-\ln h) \cdot (x_k^T \cdot D_b \cdot x_k)]^{\frac{1}{2}} - x^{(0)}(k) - 0.5ax^{(1)}(k-1)\} \quad (17)$$

$$\underline{x}^{(1)}(k) = \frac{2}{a} \{b_c x_k - [(-\ln h) \cdot (x_k^T \cdot D_b \cdot x_k)]^{\frac{1}{2}} - x^{(0)}(k) - 0.5ax^{(1)}(k-1)\} \quad (18)$$

三、模糊迴歸模型

模糊迴歸模型在建立模型時有幾個重要觀念：

(一) 線性關係，自變數和應變數之間呈現線性關係。

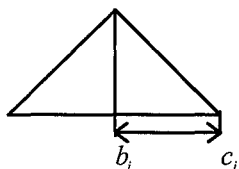
$$Y(\mathbf{x}_k) = B_0 + B_1 x_{1k} + \dots + B_n x_{nk} = \mathbf{B} \mathbf{x}_k \quad (19)$$

$$\mathbf{x}_k = (1, x_{1k}, \dots, x_{nk})^T ; \mathbf{B} = (B_0, \dots, B_n)$$

(二) 模糊參數，在模糊迴歸的模型中，所有解釋變數的係數 $\mathbf{B}$ 均是 L-type 的模糊數 (Dubois and Prade, 1978)。

因此模糊參數向量 $\mathbf{B}$ 的表達方式就是， $B_i = (b_i, c_i)$ ，而且 b_i 是中心值， c_i 是半徑值，因此 B_i 又可以下列方式表示：

$$A_i = \{u | b_i - c_i \leq u \leq b_i + c_i\} = [b_i - c_i, b_i + c_i] \quad (20)$$



此時 $Y(\mathbf{x}_k)$ 的隸屬函數為：

$$Y(\mathbf{x}_k) = (b_0, c_0) + (b_1, c_1) x_{1k} + \dots + (b_n, c_n) x_{nk} = (\mathbf{b}' \mathbf{x}_k, \mathbf{c}' |\mathbf{x}_k|) \quad (21)$$

(三) 觀測值 $Y(\mathbf{x}_k)$ 集合與估計值 $\hat{Y}(\mathbf{x}_k)$ 集合之包含關係。

模糊迴歸中最重要的觀念為：在某個水準下，實際觀測值（模糊數）的截集能被估計值（模糊數）的截集所包含；而且可能性分配必包含觀測值，觀測值必包含必然性。

$$Y(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{b}' \mathbf{x}_k, \mathbf{c}' |\mathbf{x}_k|) \quad (22)$$

可能性推估模型：

$$Y^*(\mathbf{x}_k) = B_0^* + B_1^* x_{1k} + \dots + B_n^* x_{nk} = (\mathbf{b}^* \mathbf{x}_k, \mathbf{c}^* |\mathbf{x}_k|), \quad k = 1, \dots, p \quad (23)$$

$$\text{Min}_{\mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*} \sum_{k=1}^m \mathbf{c}^* |\mathbf{x}_k|$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{b}^* \mathbf{x} + (1-h) \mathbf{c}^* |\mathbf{x}_k| \geq y_k + e_k$$

$$\mathbf{b}^* \mathbf{x} - (1-h) \mathbf{c}^* |\mathbf{x}_k| \leq y_k - e_k, \quad k = 1, \dots, m$$

$$\mathbf{c}^* \geq 0 \quad (24)$$

必然性推估模型：

$$Y_*(\mathbf{x}_k) = B_{*0} + B_{*1} x_{1k} + \dots + B_{*n} x_{nk} = (\mathbf{b}_* \mathbf{x}_k, \mathbf{c}_* |\mathbf{x}_k|), \quad k = 1, \dots, p \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Max}_{b, c} \sum_{k=1}^m c'_k |x_k| \\
& \text{s.t.} \quad b'_k x + (1-h)c'_k |x_k| \leq y_k + e_k \\
& \quad b'_k x - (1-h)c'_k |x_k| \geq y_k - e_k, \quad k=1, \dots, m \\
& \quad c_k \geq 0
\end{aligned} \tag{26}$$

(四) 模糊度之最小化

模糊迴歸是將殘差的產生視為系統結構的不明確所致，因此將殘差視為系統參數的模糊。而整個模式可轉換成數學規劃問題，其目標函數為模糊參數或估計值模糊度最小化，目標函數可定義如下：

$$J = \sum_{k=1}^p (c^t |x_k|)^2 = c^t \left(\sum_{k=1}^p |x_k| |x_k|^t \right) c \tag{27}$$

$$(y_k, e_k) \in Y(x_k), \quad k=1, \dots, p \tag{28}$$

因此模糊迴歸模型最後可轉換成線性規劃模式 (linear programming model) 求解，如下：

$$\begin{aligned}
& \text{Min}_{b, c} J = c^t \left(\sum_{k=1}^p |x_k| |x_k|^t \right) c + \xi b^t b \\
& \text{s.t.} \quad b^t x_k + c^t |x_k| \geq y_k + e_k \\
& \quad b^t x_k - c^t |x_k| \leq y_k - e_k, \quad k=1, \dots, p \\
& \quad c \geq 0
\end{aligned} \tag{29}$$

肆、台灣股市加權指數預測模式之實證應用與其結果分析

本節共分為三小節。第一小節首先說明本研究之問題描述。第二小節則是以實際數據代入 PGM(1,1) 及模糊迴歸運算，將其所代表的狀況呈現。第三小節為結果分析與討論。

一、問題描述

我們以股市股價加權指數收盤價為例，說明灰色可能性模型的應用及使用不同樣本數所呈現的情形及預測狀況，並且以相同的資料使用模糊迴歸的模型進行預測，以分析兩種預測方法。使用 2001 年 10 月到 2001 年 12 月間的資料建構模型，而且以 PGM(1,1) 學習演算法不僅避免了 h 值難以決定的問題，且所得到之建模之精確度亦較 $h=0.5$ 時所得到之精確度為高 (胡宜中等, 2001)。

自 2001 年 10 月到 2001 年 12 月間，從表 1 (見附錄) 中可知股價指數呈現上、下起伏之現象。但是由於樣本數的數量會決定變化的趨勢，為驗證多少個樣本數可以代表趨勢的演進，因此選取六個、十個及二十個，三種多數投資人選取的樣本數，分別代表週線、半月線及月線，但是為使上述資料呈現更明顯的變化趨勢，故將上述資料進行累

加加成後，即呈現明顯之規律變化，如表 2 所示（見附錄）。

二、可能性灰色預測模型

將給定的原始數列資料 $x^{(0)}$ 經 AGO 後可得 $x^{(1)}$ ，根據這些資料建立 GM(1,1) 灰微分方程模型：

$$\frac{\partial x^{(1)}(k)}{\partial k} + ax^{(1)}(k) = b$$

將上式以離散近似模式表示之：

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

如此不斷的計算便可得到求上下包絡線所需要的參數：

$$\bar{x}^{(1)}(k) = \frac{2}{a} \{b_c \cdot x_k + [(-\ln h) \cdot (x_k^T \cdot D_b \cdot x_k)]^{\frac{1}{2}} - x^{(0)}(k) - 0.5ax^{(1)}(k-1)\}$$

$$\underline{x}^{(1)}(k) = \frac{2}{a} \{b_c \cdot x_k - [(-\ln h) \cdot (x_k^T \cdot D_b \cdot x_k)]^{\frac{1}{2}} - x^{(0)}(k) - 0.5ax^{(1)}(k-1)\}$$

在將所求得的參數數據及實際所收集到的樣本資料帶入上式，便可將可能性灰色預測模型建立，並且藉由上下包絡線進行各種不同樣本數預測。下圖 1~圖 3，則是代表各樣本數的可能性灰色預測模型的圖形。

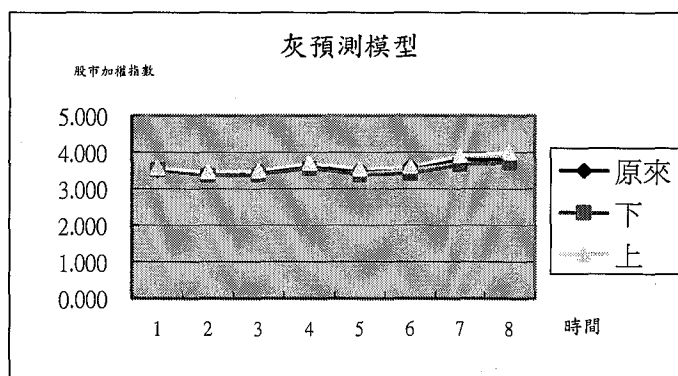


圖 1 可能性灰預測六個樣本圖形

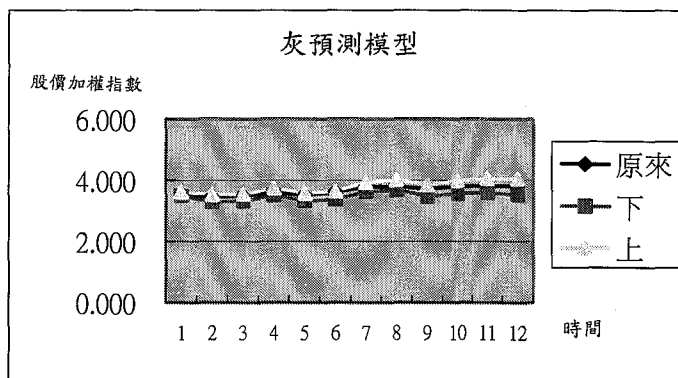


圖 2 可能性灰預測十個樣本圖形

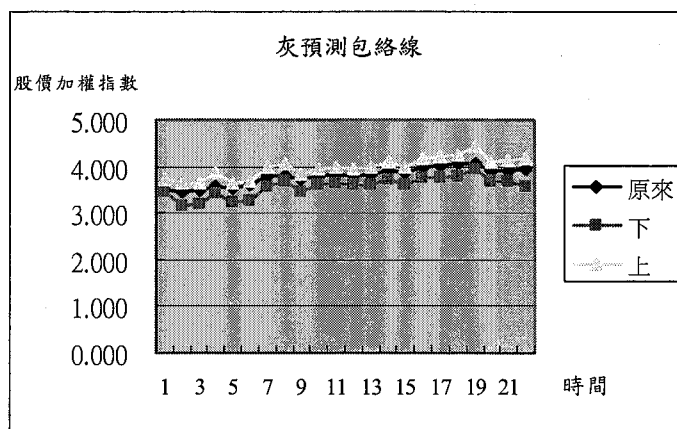


圖 3 可能性灰預測二十個樣本圖形

三、模糊迴歸模型

股價加權指數之趨勢模型，是以 2001 年 10 月 2 日起每日股價加權指數收盤價的六筆、十筆及二十筆資料建立模型，如圖 4~圖 6 所示。

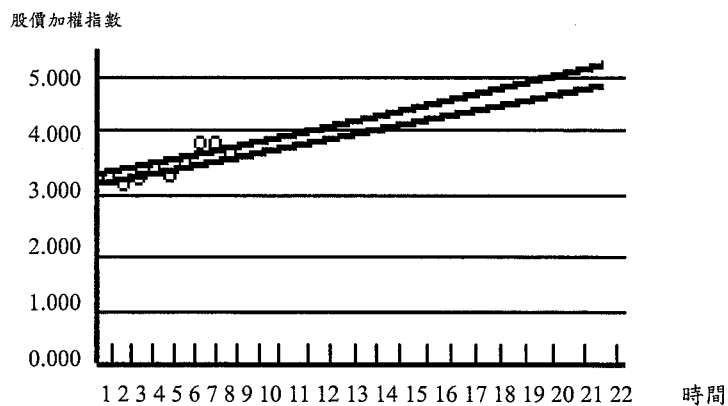


圖 4 模糊迴歸六個樣本圖形

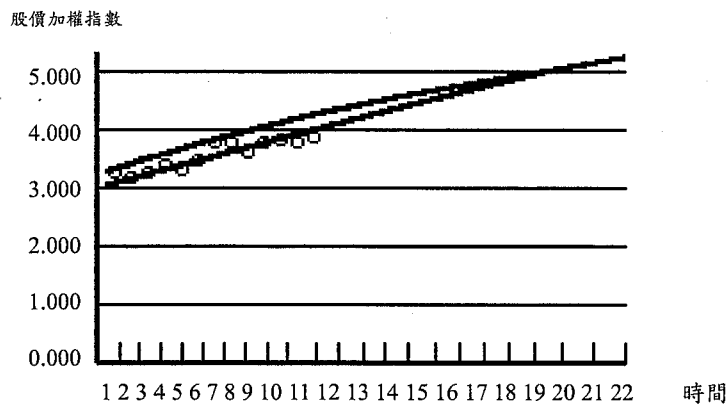


圖 5 模糊迴歸十個樣本圖形

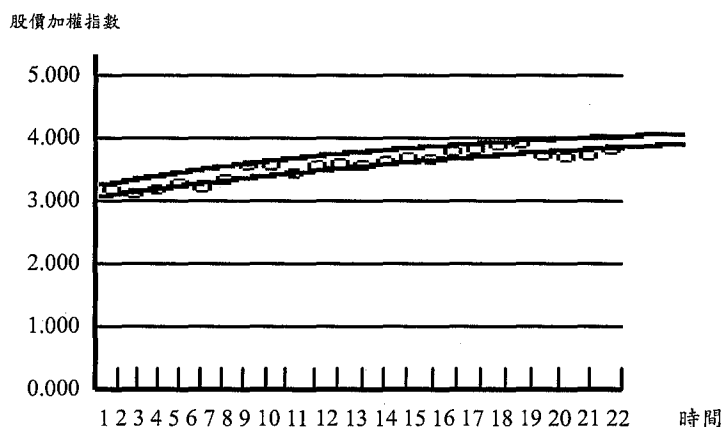


圖 6 模糊迴歸二十個樣本圖形

因此以 10 月 2 日至 10 月 30 日的樣本資料所建立的模型進行預測，模糊迴歸模型所跑出的六個樣本圖形較為發散，模型所跑出的十個樣本圖形較為收斂，而模型所跑出的二十個樣本圖形整體較為平滑。模糊迴歸與可能性灰色預測相同的具有上下兩條包絡線，但是由於兩種方法的基本理論不同，所以也會導致預測準度的差異。表 1 至表 3 便是可能性灰預測與模糊迴歸模型預測的估計結果。

表 1 六個樣本數下的預測模型估計結果（例） 單位：千點

對照值		可能性灰預測模型				模糊迴歸模型			
日期	原始資料 $x^{(0)}$	上包絡 $\bar{x}^{(0)}$	中心值 $x^{(0)}$	下包絡 $\underline{x}^{(0)}$	誤差 (%) $\frac{ x^{(0)} - \bar{x}^{(0)} }{x^{(0)}} \times 100\%$	上包絡 $\bar{x}^{(0)}$	中心值 $x^{(0)}$	下包絡 $\underline{x}^{(0)}$	誤差 (%) $\frac{ x^{(0)} - \bar{x}^{(0)} }{x^{(0)}} \times 100\%$
10/2	3.492	3.568	3.542	3.517	1.4449	3.511	3.465	3.419	1.3500
10/3	3.446	3.467	3.416	3.366	0.8560	3.535	3.489	3.444	1.248
10/4	3.493	3.490	3.435	3.380	1.6530	3.560	3.514	3.469	0.6010
10/5	3.585	3.692	3.626	3.559	1.1382	3.586	3.540	3.495	1.2552
10/8	3.520	3.540	3.458	3.377	1.7480	3.611	3.565	3.520	1.2784
10/9	3.618	3.610	3.511	3.411	2.9670	3.637	3.591	3.545	0.7463
		預測值				預測值			
10/11	3.789	3.900	3.781	3.663	0.1990	3.663	3.617	3.571	4.5394
10/12	3.801	3.996	3.857	3.718	1.4699	3.689	3.642	3.596	4.1831

表 2 十個樣本數下的預測模型估計結果 (例) 單位：千點

對照值		可能性灰預測模型				模糊迴歸模型			
日期	原始資料 $x^{(0)}$	上包絡 $\bar{x}^{(0)}$	中心值 $x^{(0)}$	下包絡 $\underline{x}^{(0)}$	誤差 (%) $\frac{ x^{(0)} - \bar{x}^{(0)} }{x^{(0)}} \times 100\%$	上包絡 $\bar{x}^{(0)}$	中心值 $x^{(0)}$	下包絡 $\underline{x}^{(0)}$	誤差 (%) $\frac{ x^{(0)} - \bar{x}^{(0)} }{x^{(0)}} \times 100\%$
10/2	3.492	3.618	3.557	3.496	1.8560	3.492	3.440	3.387	1.4891
10/3	3.446	3.533	3.415	3.297	0.9020	3.542	3.479	3.416	0.9576
10/4	3.493	3.545	3.432	3.319	1.7410	3.592	3.521	3.450	0.8016
10/5	3.585	3.742	3.628	3.514	1.1987	3.640	3.564	3.487	0.5858
10/8	3.520	3.577	3.455	3.334	1.8466	3.688	3.608	3.527	2.5000
10/9	3.618	3.638	3.505	3.371	3.1250	3.735	3.652	3.569	0.9397
10/11	3.789	3.931	3.781	3.632	0.2090	3.781	3.698	3.614	2.4017
10/12	3.801	4.028	3.859	3.692	1.5480	3.825	3.743	3.661	1.5259
10/15	3.712	3.847	3.658	3.469	1.4600	3.869	3.789	3.709	2.0744
10/16	3.794	3.990	3.779	3.568	0.4010	3.910	3.835	3.759	1.0807
		預測值				預測值			
10/17	3.817	4.055	3.821	3.587	0.1039	3.951	3.881	3.810	1.6767
10/18	3.811	4.047	3.789	3.530	0.5900	3.989	3.926	3.862	3.0176

表 3 二十個樣本數下的預測模型估計結果 (例) 單位：千點

對照值		可能性灰預測模型				模糊迴歸模型			
日期	原始資料 $x^{(0)}$	上包絡 $\bar{x}^{(0)}$	中心值 $x^{(0)}$	下包絡 $\underline{x}^{(0)}$	誤差 (%) $\frac{ x^{(0)} - \bar{x}^{(0)} }{x^{(0)}} \times 100\%$	上包絡 $\bar{x}^{(0)}$	中心值 $x^{(0)}$	下包絡 $\underline{x}^{(0)}$	誤差 (%) $\frac{ x^{(0)} - \bar{x}^{(0)} }{x^{(0)}} \times 100\%$
10/2	3.492	3.710	3.581	3.453	2.5629	3.522	3.450	3.378	1.2027
10/3	3.446	3.659	3.409	3.159	1.0570	3.571	3.495	3.418	1.4219
10/4	3.493	3.657	3.422	3.186	2.0420	3.618	3.538	3.457	1.2883
10/5	3.585	3.858	3.635	3.413	1.4057	3.662	3.578	3.494	0.1953
10/8	3.520	3.654	3.444	3.234	2.1580	3.703	3.616	3.529	2.7272
10/9	3.618	3.684	3.485	3.286	3.6640	3.741	3.653	3.564	0.9674
10/11	3.789	3.969	3.779	3.589	0.2460	3.777	3.687	3.597	0.2692
10/12	3.801	4.052	3.869	3.688	1.8153	3.811	3.720	3.628	2.1310
10/15	3.712	3.826	3.648	3.471	1.7130	3.842	3.751	3.659	1.0506
10/16	3.794	3.950	3.776	3.602	0.4700	3.872	3.780	3.688	0.3690
10/17	3.817	3.995	3.822	3.649	0.1219	3.899	3.808	3.716	0.2358
10/18	3.811	3.959	3.784	3.609	0.6920	3.924	3.834	3.744	0.6035
10/19	3.845	3.981	3.802	3.624	1.1090	3.948	3.859	3.770	0.3641

10/22	3.900	4.105	3.920	3.735	0.5168	3.970	3.882	3.794	0.4615
10/23	3.874	3.980	3.787	3.594	2.2410	3.991	3.905	3.818	0.8002
10/24	3.986	4.169	3.966	3.763	0.5060	4.010	3.926	3.842	1.5052
10/25	4.012	4.202	3.988	3.774	0.5990	4.029	3.947	3.864	1.6201
10/26	4.043	4.253	4.026	3.799	0.4220	4.046	3.966	3.885	1.9045
10/29	4.065	4.422	4.181	3.941	2.8608	4.062	3.983	3.904	2.0172
10/30	3.915	4.089	3.879	3.669	0.9080	4.077	4.001	3.924	2.1967
預測值					預測值				
10/31	3.903	4.153	3.928	3.702	0.6330	4.091	4.017	3.943	2.9208
11/1	3.929	4.162	3.876	3.589	1.3620	4.105	4.033	3.960	2.6469

四、結果分析與討論

由表 1 至表 3 的預測結果中，可得知在可能性灰預測模型中，它所建立出的模型會盡可能的考慮所有的樣本資料，雖然三種樣本數建立的模型上下包絡線，無法包含所有的樣本資料，但是可以注意到，未被包含的樣本資料都相當靠近包絡的區間，因此代表所建立的模型有考慮到各樣本間彼此的差異及影響，是個相當有代表性的模型。而且在預測的結果中，可發現不論是六個、十個或是二十個樣本所預測的結果，預測之中心值與資料之平均誤差為 0.7275%，且上下限範圍非常小，可說是可以相當準確預測後幾期之股價加權指數。此方法並能符合小樣本（30 個樣本內）預測基礎與推導過程，可修正累加後傳統迴歸方法作校估係數之假設。在此研究例中，由實證的結果可以發現，其中十個樣本是預測值中誤差最小的，且包絡區間的開口是最有規律性的，所以在本研究中得知在可能性灰測預測模型中，十個樣本數即可以適當的預測，不見得需要很多的樣本數，此可確定本方法與原理論精神相符合，但真正幾個樣本數為最適當呢？是否依問題實例有異？此為未來探討的課題。

在模糊迴歸模型中，模糊迴歸的特性便是要將所有的樣本資料的現象考慮進入，因此會盡可能包絡所有的樣本資料。在以股市加權資金指數為例的研究中，模糊迴歸各樣本數預測的結果，預測之中心值與資料之平均誤差為 3.1641%，其預測準度與可能性灰預測模型相較之下表現略差。在此實證研究中，從圖 4~圖 6 中可觀察出，由於模糊迴歸在建構模型時，對於樣本資料周全考量的特性，使得模糊迴歸的包絡區間呈現較大的區間，所以才會導致在預測值上會有較大的誤差。

在此研究中可發現，可能性灰色預測模型，因為有著一般灰色預測小樣本的特性，故在預測情況的應用上，相當適合在短時間及樣本數過少的情形下使用，而且在投資趨勢預測準度上，誤差相當小，但是要承擔的風險相對也較大，因此可能性灰預測模型適合風險趨向型的投資者；模糊迴歸，由於會儘可能考量全部的樣本特性，因此適合運用於時間點上有明顯波動的預測，可藉由圖表的呈現，了解預測的趨勢及訊號（如圖 4~圖 6 所示），此特性補足可能性灰色預測模型的漏洞，對於變動過大的樣本點仍加入適度的考量，因此所提供的趨勢預測資料，雖然在預測準度效果上並不如可能性灰預測模型

佳，但是模糊迴歸模型提供一個正確的投資趨勢，因此模糊迴歸模型預測較適合長期投資及保守型的投資者。

伍、結論與建議

本文主要目的在分析可能性灰預測模型及模糊迴歸兩種預測方法，並特別針對研究所必須取決的樣本數作探討。所有樣本數中，由於六個樣本數最少，因此在預測股價加權資金指數等財務相關的研究時，由於會面臨到相當頻繁的數值變動，便導致在樣本少的情況下會造成較難全部包絡的現象及預測區間在未來的趨勢上呈現發散的形狀，使得預測誤差增加及預測值的可信度降低；而二十個樣本數，由於樣本數多所導致呈現出的樣本狀態是較平滑的趨勢，故在財務預測上準度及波動點要求都較嚴格的研究中，便無法如同小樣本所呈現的合乎需求，故是以這二者之中的十個樣本較能兼具兩者之優點，且本研究實際的研究結果也顯示出此結論。但在樣本數的取決上，尚有可再深入的方向：將一段長時間的樣本資料，分別以各樣本數進行多次預測，在將多次的結果平均，所呈現的結果會更精準。

至於可能性灰色預測與模糊迴歸兩種方法在預測上的運用，達到的效果各有千秋，只是在運用的範圍上略有不同。模糊迴歸的模型能夠確切的顯示出樣本資料的狀況，以及運用在稍大量的樣本上（相較傳統迴歸所需知樣本數為小），這與可能性灰色預測運用在少量樣本上的情形是較不同。所以可能性灰色預測及模糊迴歸在進行短時間及非激烈震盪的數據上，都可表現出精準的預測，但是在出現大幅度的波動時，如 2001 年 11 月中後期的股價加權資金指數，仍然能夠進行預測，但是誤差便會加大，如表六所示；故本研究仍可更深入的探討，除樣本數量的取決外，尚有哪些方向可供投資者在預測時思考。另外，由於台灣證券市場屬於淺碟型市場，會受到許多外在環境因素的影響，因此如果能夠考量定性因素，相信可以提升預測的準確度，但本研究限於定性研究的指標與數據獲得困難及研究的複雜程度，並未將定性研究納入，不過這都是未來後續研究者可以再深入研究的部分。

參考文獻

1. 李天行、陳能靜、蔡榮裕，「現貨盤後期貨交易資訊內涵之研究-以新加坡交易所日經 225 指數期貨為例」，*管理學報*，第十八卷，第四期，第 567-588 頁，2001。
2. 吳坤暉、曾國雄，2002，「可能性灰色預測模型在台灣股市加權指數上之應用」，*灰色系統學刊*，第五卷，第一期（預定刊出）。
3. 邵順利，「模糊迴歸模型之探討及其在風險係數之研究」，國立中央大學資訊管理研究所碩士論文，1994。
4. 胡宜中、曾國雄、徐演政、陳瑞順，2001，「以學習演算法求解 GM (1,1) 模型之發展係數與控制係數」，*灰色系統學刊*，第四卷，第一期，第 17-25 頁。
5. 陳榮方、楊敏里，1997，「灰色理論與迴歸預測應用於短期預測之探討」，*高雄科學技術學院學報*，第 27 期，第 217-228 頁。
6. 曹勝雄、曾國雄、江勁毅，1996，「傳統計量迴歸、模糊迴歸、GMDH、類神經網路四種方法在預測應用之比較—以國人赴港旅客需求之預測為例」，*中國統計學報*，第三十四卷，第二期，第 132-161 頁。
7. 曾國雄、江勁毅，1998，「可能性灰色模型之研究」，*灰色系統學刊*，第一卷，第一期，第 19-31 頁。
8. 鄧聚龍、郭洪，1996，「灰預測原理與應用」，全華圖書有限公司。
9. 劉定焜、施能仁，1998，「台灣股價指數期貨之避險操作—灰色滾動模式預測」，*灰色系統學刊*，第一卷，第二期，第 101-121 頁。
10. Chang, P. T., "Fuzzy seasonality forecasting", *Fuzzy Sets and Systems* 90(1): 1-10, 1997.
11. Chen, T. and Wang, M. J., "Forecasting methods using fuzzy concepts", *Fuzzy Sets and Systems* 105(3): 339-352, 1999.
12. Deng, J. L., "Control problems of grey systems", *Systems and Control Letters* 5(3): 288-294, 1982.
13. Deng, J. L., "Introduction to grey system theory", *The Journal of Grey System* 1(1): 1-24, 1989.
14. Dubois, D. and Prade, H., "Operations on fuzzy numbers", *International Journal of System Science* 9(3): 357-360, 1978.
15. Huang, Y. P. and Huang, C. H., "Real-valued genetic algorithms for fuzzy grey prediction system", *Fuzzy Sets and Systems* 87(3): 265-276, 1997.
16. Modis, T., "Technological Forecasting at the Stock Market", *Technological Forecasting and Social Chang* 62(3): 173-202, 1999.
17. Tanaka, H., "Fuzzy data analysis by possibility linear models", *Fuzzy Sets and Systems* 24(3): 363-375, 1987.
18. Tanaka, H. and Watada, J., "Possibility linear systems and their application to the linear

- regression model”, *Fuzzy Sets and Systems* 27(2): 275-289, 1988
19. Tanaka, H., Hayashi, I. and Watada, J., “Possibility linear regression analysis for fuzzy data”, *European Journal of Operational Research* 40(3): 389-396, 1989.
20. Tanaka, H., Uejima, S. and Asai, K., “Linear regression analysis with fuzzy model”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 12(6): 903-907, 1982.
21. Tanaka, H., and Lee, H., “Interval regression analysis by quadratic programming approach”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(4): 473-481, 1998.
22. Tseng, F. M., Yu, H. C. and Tzeng, G. H., “Applied Hybrid Grey Model to Forecast Seasonal Time Series”, *Technological Forecasting and Social Chang* 67(2-3): 291-302, 2001.
23. Verhoeven, P., Pilgram, B., McAleer, M. and Mees, A., “Non-linear modeling and forecasting of S&P 500 volatility”, *Mathematics and Computers in Simulation* 59(1-3): 233-241, 2002.

附錄

每日之股價加權指數（收盤價） 單位：千點

時間	10/2	10/3	10/4	10/5	10/8	10/9	10/11
指數(x_k)	3.492	3.446	3.493	3.585	3.520	3.618	3.789

時間	10/12	10/15	10/16	10/17	10/18	10/19	10/22
指數(x_k)	3.801	3.712	3.794	3.817	3.811	3.845	3.900

時間	10/23	10/24	10/25	10/26	10/29	10/30	10/31
指數(x_k)	3.874	3.986	4.012	4.043	4.065	3.915	3.903

每日之累加生成股價加權資金指數 單位：千點

時間	10/2	10/3	10/4	10/5	10/8	10/9	10/11
指數(x_k)	3.492	6.938	10.431	14.016	17.536	21.154	24.943

時間	10/12	10/15	10/16	10/17	10/18	10/19	10/22
指數(x_k)	28.744	32.456	36.250	40.067	43.878	47.723	51.623

時間	10/23	10/24	10/25	10/26	10/29	10/30	10/31
指數(x_k)	55.497	59.483	63.495	67.538	71.603	75.518	79.421